

Los aparatos de apoyo en los puentes

Nuevo apoyo móvil de tres piezas

POR

P. MICHAELSEN

A menudo se presenta al ingeniero el problema de proyectar, en las construcciones enrejadas, disposiciones que permitan transmitir ciertos esfuerzos verticales sobre apoyos, al mismo tiempo que permitan ciertos desplazamientos horizontales, ya sean éstos originados por cambios de temperatura o por deformaciones del enrejado producidas por la sobrecarga.

En la enorme mayoría de las construcciones de fierro se acepta que estos movimientos se desarrollan sin encontrar resistencias; sin embargo, tomándolas en cuenta resultan a menudo tensiones suplementarias, tanto en el enrejado (superestructura), como en las pilas de apoyo (cepas). La influencia de estas tensiones suplementarias exige un cambio de dimensiones, i no es raro el caso en que la influencia del aumento de la tension sea tal, que el sistema elegido sea anti-económico. A esto hai que agregar que muchas disposiciones quedan estáticamente indeterminadas.

De estos problemas de disposiciones, el mas corriente es el de los apoyos de las vigas de puente, en que se tiene dos reacciones verticales. Uno de estos apoyos es, en jeneral, fijo, i el otro permite movimientos longitudinales; en las vigas continuas i de otros sistemas se debe tener apoyos fijos i apoyos movibles, pero dispuestos de tal modo que se puedan mover sin encontrar resistencias.

El problema se ha pretendido resolver en la práctica de diferentes maneras. Los sistemas empleados se pueden clasificar en tres grupos:

A) *Apoyos de deslizamiento*, en que dos superficies pulidas deslizan una sobre la otra.

B) *Apoyos con rodillos*, en los cuales la viga rueda sobre cuerpos cilíndricos.

C) *Apoyos péndulos*, (a manera de péndulo), en los cuales el movimiento horizontal es obtenido por una pequeña rotacion vertical de una cepa o pila. La base fija de

esta cepa puede estar debajo de las vigas i entónces es cepa apoyada, o encima de ellas, como un péndulo. Esta clase de apoyos se presenta en casos aislados, en algunas vigas continuas, arcos continuos con rótulas, etc., (fig. 1).

De los grupos restantes, los apoyos de deslizamiento son los que ménos satisfacen las exigencias que se persiguen. En ellos es necesario vencer en el movimiento la resistencia de frotamiento de las superficies, resistencia variable, que crece con los años por la oxidacion de las superficies, de tal modo que dejan de servir parcial i aun totalmente. En vigas de considerable luz, la falta del funcionamiento de los aparatos de apoyo hace que se desarrollen fuerzas horizontales considerables i que son trasmitidas a los estribos i machones, dislocando las piedras de asiento (caso del Ñuble, trizadura del estribo sur), destruyendo los morteros de la mampostería o doblando las vigas. No son raros los casos en que los ingenieros se han visto obligados a cambiar el apoyo de deslizamiento por apoyo con rodillos, para evitar la influencia dañina del empuje horizontal.

Pero tambien los apoyos con rodillos circulares o con segmentos circulares i que se agrupan en série de tres o mas entre dos planchas planas, forman un sistema movable con graves inconvenientes (fig. 2 i 3), conocidos desde mucho tiempo i que solo mencionaré a la lijera.

El primer inconveniente que salta a la vista es el conjunto complicado. Para obtener una regular centracion en obras de gran importancia i magnitud, ha sido necesario sobreponer varios de estos sistemas. El polvo i el carboncillo de las máquinas, que se introduce entre los rodillos, dificulta i aun impide el movimiento; por otro lado la reparticion exacta del esfuerzo sobre cada rodillo es difícil de ser tomada en cuenta, por la dificultad de obtener rodillos del mismo diámetro, por las deformaciones elásticas de las planchas, la inferior diversa de la superior; por el polvo que se introduce i que hace desaparecer los planos primitivos de asiento de los rodillos, i en fin, por la posicion disimétrica del sistema con relacion a la resultante del empuje. En casos tan desfavorables como los supuestos, en vez de obtener un movimiento *rodante* se obtiene un movimiento *por deslizamiento*. En casos observados en la práctica, de un apoyo *trasladado* (o *voleado* para el caso de sectores. Malleco), se debe buscar la causa en uno de los inconvenientes mencionados. Además, se ha comprobado que apoyos de esta clase, de considerable número de rodillos i de pequeño diámetro, penetran visiblemente en las planchas de apoyo; en el Ñuble i en el Maule se puede observar esto; pero hai que recordar que esos puentes fueron construidos en el pais, por fábricas nacionales, por los años 1884-1885, i en aquel entónces no era posible exigirles un material especial, mas duro, como se exige para estos apoyos; razon tambien porque el Maule tiene hasta 8 rodillos juntos.

La mayoría de estos inconvenientes se eliminan con el empleo de un solo rodillo; sin embargo su uso no se ha jeneralizado. Con escepcion de Holanda, en los demas paises se ha aplicado en casos aislados, i en puentes de pequeñas luces. Para luces grandes se temeria, por consideraciones teóricas, que resultasen rodillos de-

masiado grandes, i que la componente horizontal se trasmitiese por el apoyo a la pila, con las influencias nocivas conocidas.

En las revistas técnicas no he podido encontrar aplicaciones del *rodillo único*, por lo cual he escrito a algunas casas constructoras de puentes i a la Direccion de algunos Institutos de Ingenieros de Europa. He aquí una contestacion de un Instituto de Austria:

«Apoyos móviles de puentes con un solo rodillo se han construido muchas veces; objeciones fundamentales no se les puede hacer, si están bien dimensionados, i si su material es bastante duro (acero fundido) para soportar dentro del límite tolerable, las tensiones que resulten. El cálculo se puede hacer por las fórmulas de Hertz.

« Ejemplos de puentes ejecutados con apoyos de un rodillo:

« 1.º Puente sobre el río Beuvron, en Celletes, para el ferrocarril de Orleans. Luz del tramo: 42,00 m. Diámetro del rodillo: 400 m/m. Largo del rodillo: 810 m/m.

« 2.º Puente sobre el Spree, en Berlin.

« 3.º Puente cerca de Krakau, de 18,00 m de luz. Rodillo de 120 m/m.

« En jeneral esta clase de apoyos se debe recomendar para luces medianas i menores. En puentes grandes, el punto de aplicacion de la reaccion, que es dado por el punto de contacto de la placa superior con el rodillo, es variable; depende de la carga i de las dilataciones, i entónces es necesario tomar en cuenta las solitaciones excéntricas. Por otra parte, para puentes grandes resultan diámetros enormes, que dificultan una disposicion adecuada.

« Por la flecha que toma el puente, la placa superior del apoyo se inclina de cierto ángulo sobre el rodillo, con lo cual la reaccion sobre la placa inferior es algo oblicua, teniendo que ser resistida la componente horizontal por el frotamiento del rodillo sobre la plancha del apoyo. En puentes de luces pequeñas i medianas se puede tener la seguridad que la inclinacion cae dentro del ángulo de frotamiento. Una curvatura de la placa superior no eliminaría este inconveniente, porque los dos cuerpos tanjentes se desarrollan el uno sobre el otro, cambiando el punto de contacto del rodillo; pero tiene la ventaja de bajar la solitacion de las piezas de apoyo e impide que se *traslade* por la trepidacion.»

Un distinguido ingeniero me dijo en una ocasion que desde muchos años esos rodillos se aplicaban en Holanda. Sobre el comportamiento de estos rodillos en la práctica, he obtenido por su intermedio los siguientes datos, que emanan de un Inspector de ferrocarriles de Holanda, quien tambien dirige la conservacion de los puentes.

«El primer rodillo móvil está en uso desde 1889 en la via férrea de *Utrecht-Amsterdam*. En la línea de Utrecht-Rotterdam se encuentra un puente para doble via con dos vigas principales. La luz de los tramos es de 98,70 i 94,30 m, i tienen cada uno un rodillo único de dilatacion, de 450 i 360 m/m de diámetro respectivamente.

«El funcionamiento es mui sencillo, i plenamente satisfactorio. Tienen gran sensibilidad, i la limpia es mui fácil.

«Cerca de Einhoven hay un puente sobre la *Dommel*, de 20 m de largo, i con « un rodillo único de dilatacion. El movimiento de traslacion es perfectamente visible al pasar la sobrecarga.

«Sobre la ventaja de encorvar la placa superior, no hai mas que un antecedente: « un carro de dilatacion (fig. 4) al cual hace 14 años se le cambió el sistema de rodillos múltiples por un solo rodillo (fig. 5). Hai que hacer notar que esto ha sido « un caso casual i no previsto; por lo tanto, no se puede asegurar la ventaja de esta « forma sobre la de placas rectas.

«A muchos puentes de Holanda se les ha cambiado los apoyos por un rodillo « único, siendo los resultados plenamente satisfactorios. Hoi dia se emplea de preferencia esta disposicion en todos los puentes menores. Para impedir que el rodillo « se ponga oblicuo, se dispone en sus extremos un engranaje entre el rodillo i la placa superior.»

El puente sobre el Beuvron en Celletes, de que habla la comunicacion austriaca, fué construido en 1899 i estuvo espuesto en la Esposicion Universal de Paris en 1900. En las figuras 6 i 7 se ven los detalles de la construccion del rodillo. Obsérvese que tambien se le construyó para tomar inclinacion en el sentido paralelo al eje del puente. Esto se hizo para obtener siempre un esfuerzo centrado sobre el rodillo, pues los montantes extremos se inclinan algo por la deformacion de los travesaños. La luz del puente es de 42,00 m, la reaccion máxima del apoyo, de 70 toneladas.

En la figura 8 se tiene el rodillo de un puente sobre el Spree en Berlin.

En el año 1889 *H. D. Schmidt* hizo una proposicion para aplicar un sistema de apoyos de que era inventor, i que recomendaba para puentes menores, con el nombre de *apoyo de segmento móvil* (*Segment-Kipp-Lager*). Un proyecto de esta clase se encuentra en la fig. 9.

Es mui fácil esplicarse su funcionamiento. El empuje es siempre centrado. Tiene sin embargo el inconveniente de que, al dilatarse el puente, se produce una resistencia de friccion entre la rótula i el segmento, aparte de la resistencia de rodado de esta. Este sistema es la combinacion de un rodillo fijo (rótula) con un apoyo móvil. Aplicaciones de este sistema a las construcciones no eran conocidas hasta 1902.

Otra solucion para el problema de los apoyos móviles fué presentada por *Kühler* en 1902. Él propone usar cilindros, a los que saca la parte que no trabaja. (fig. 10). En aleman se tiene para esta clase de apoyos dos espresiones: *Stelzenlager* i *Pendel-Lager*; la primera es la espresion correcta, pero ha caido en desuso, usándose la segunda espresion, que es impropia. La primera no tiene traduccion apropiada, i me contentaré, pues, con llamarlos a semejanza de la segunda espresion: *rodillo péndulo*. No hai que confundir este apoyo con el último grupo de los apoyos móviles (apoyos pendulares, fig. 1).

Kühler propone usar un péndulo que no sea un trozo de rodillo sino un prisma de caras paralelas, con dos superficies curvas cuyo radio de curvatura sea mayor que la media altura del cilindro. La idea que predomina en este tipo es la de usar mayo-

res radios de curvatura, para tener menor altura de construccion, en oposicion a la del rodillo circular. Con esta disposicion seria posible afrontar reacciones mas fuertes, i luego aplicarla a luces mas grandes.

A pesar de lo sencilla i segura que aparece a primera vista, esta disposicion no deja de tener inconvenientes grandes, que han sido demostrados por *W. Cauer* (*). Cuando el puente se dilata, ya sea por cambios de temperatura o por deformaciones debidas a la sobrecarga, se produce un desplazamiento de los puntos de contacto del péndulo, de tal modo que las reacciones no quedan en una vertical, como estaban ántes del cambio de posicion. Llamemos φ el ángulo de la inclinacion del péndulo; el valor máximo de la excentricidad del apoyo tiene, para pequeños valores de φ , un valor aproximado de

$$\varepsilon = 2 \left(r - \frac{h}{2} \right) \varphi$$

$$\text{i el peralte: } \delta = h_1 - h = \left(r - \frac{h}{2} \right) \varphi^2$$

En la suela inferior apoyada se desarrolla la componente horizontal H , que tiene un momento $H h_1$, opuesto al que se produce por la reaccion del apoyo i la excentricidad, de tal modo que se tiene: $H h_1 = P \varepsilon$, i aproximadamente

$$H = \frac{2P}{h} \left(r - \frac{h}{2} \right) \varphi$$

El valor H puede obrar en el sentido de la traccion i de la compresion, i puede alcanzar a menudo valores considerables.

Cauer ha calculado que para un puente de 100 m de luz i con $h = 300$ m/m, $t = \pm 35^\circ \text{C}$ i el radio de curvatura $r = 2h$, el valor de la componente horizontal alcanza al respetable valor de 92.5 toneladas, siendo para este caso 2 mm lo que se levanta el puente, i hai posibilidad que éste deslice sobre el apoyo, en vez de rodar.

Aunque esta conclusion desfavorable proviene de que el cilindro se ha elegido con mui poca altura, queda subsistente el inconveniente en menor escala para apoyos de mayor altura, i no se alcanza a compensar la ventaja que se obtiene de una menor resistencia de rodadura con un apoyo mas alto.

Aplicaciones de la disposicion propuesta por *Kübler* no eran conocidas hasta 1902.

Un nuevo apoyo movable fué propuesto por *Halberkalt*, con privilejio esclusivo para el constructor *Lipold*. He aquí lo que el autor ha publicado sobre su apoyo.

APOYO MOVIBLE LENTICULAR (*Das Wälzlager*)

Las condiciones que deben cumplir los apoyos movibles son: sencillez en su disposicion, i reduccion a un mínimo de la resistencia que oponen al movimiento.

(*) *Cauer* trató el problema de los apoyos movibles, rodillo único o rodillo péndulo, en la revista *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, 1900.

La disposicion de la fig. 12 tiende a esas condiciones, i no la he visto propuesta en ninguna construccion. El nuevo apoyo, que llamaremos *apoyo móvil lenticular* (wälzungslager), consiste de un péndulo (lente), b , con superficies de curvatura diferentes, que recibe de una placa superior curva, a , la reaccion del puente, para trasmitirla a la plancha de asiento, c , igualmente con una superficie curva.

Con un desplazamiento del puente, el péndulo lenticular o sencillamente *lente* toma una inclinacion que produce un levantamiento de la viga; pero con una eleccion adecuada de las curvaturas, se puede conseguir que el movimiento en el sentido vertical sea nulo i que el desplazamiento sea simplemente horizontal, o que los esfuerzos resistentes por vencer sean limitados. Ademas, con una eleccion adecuada de los radios, se tiene la posibilidad de fijar las tasas admisibles entre ciertos límites (dados por la fórmula de Hertz) suficientemente altos, para usar reacciones i luces mayores que con rodillos o péndulos circulares.

Vamos a determinar las fórmulas que se derivan de un movimiento del lente.

Supongamos (fig. 13) que el lente haya jirado de un ángulo α sobre la placa inferior o base. El punto de contacto en vez de estar en F está en G (base) i F queda en F_1 en el lente. Al mismo tiempo ha rodado el apoyo superior sobre el lente i el punto primitivo de contacto ha quedado en D_1 i D_2 ; el nuevo punto de contacto es E .

Se puede aceptar con suficiente precision que la tangente a la placa superior en D_2 queda horizontal aun despues del movimiento. En realidad hai una jiracion λ al rededor del otro apoyo fijo, i la tangente de λ es igual a $\frac{\Delta}{l}$, siendo Δ el levante o descenso que experimenta la viga i la l la luz. Pero para todos los casos de la práctica λ es tan pequeño que su influencia se puede considerar nula.

Reframos todos los puntos a un sistema de ejes rectangulares $X Y$, con el origen en O , en el centro de curvatura de la base. Sean R i r los radios de los arcos superiores i R_1 i r_1 los de los arcos inferiores. Los ángulos al centro correspondientes al desplazamiento del apoyo sean γ i δ , i los correspondientes al desplazamiento del lente sean α i β . Sea ademas h la altura del lente, i $A_1 B_1 = h - r + R_1 = a$.

Vamos a determinar la trayectoria del punto D i el lugar geométrico de los puntos de contacto E , con relacion a un movimiento del lente fijado por el ángulo α .

Las relaciones de los ángulos se deducen de la igualdad de los desarrollos de cada par de arcos.

$$\text{Arco } G F = \text{arco } G F_1$$

$$\text{arco } D_1 E = \text{arco } D_2 E$$

$$r_1 \alpha = R_1 \beta$$

$$r \delta = R \gamma$$

De la figura se deduce: $\delta = \gamma + \alpha - \beta$

$$\text{De donde: } r \left(\gamma + \alpha - \frac{r_1 \alpha}{R_1} \right) = \gamma R$$

Luego las relaciones entre los ángulos α , β , γ , son dadas por las ecuaciones

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{r_1}{R_1} \alpha \\ \gamma = \frac{R_1 - r_1}{R_1} \times \frac{r}{R - r} \times \alpha \end{array} \right.$$

Sean x e y las coordenadas de D_2 . Se tiene:

$$\begin{aligned} x &= OL = OK + KL = KL + A_1 I - A_1 H \\ x &= a \operatorname{sen} (\alpha - \beta) - (R_1 - r_1) \operatorname{sen} \alpha + (R - r) \operatorname{sen} \gamma. \end{aligned}$$

Introduciendo los valores de β :

$$(2) \quad x = a \operatorname{sen} \frac{R_1 - r_1}{R_1} \alpha - (R_1 - r_1) \operatorname{sen} \alpha + (R - r) \operatorname{sen} \gamma$$

De manera semejante se tiene:

$$\begin{aligned} y &= D_2 L = R + C_1 L = R + B_1 K - (R - r) \cos \gamma \\ y &= R + a \cos (\alpha - \beta) - (R_1 - r_1) \cos \alpha - (R - r) \cos \gamma \\ (3) \quad y &= R + a \cos \frac{R_1 - r_1}{R_1} \alpha - (R_1 - r_1) \cos \alpha - (R - r) \cos \gamma \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones fijan x e y en función de α , i tambien la trayectoria de D .

Una relacion directa entre x e y no se puede presentar con claridad, porque es difícil eliminar α de las ecuaciones 2 i 3.

Las coordenadas x' e y' del punto de contacto E serán:

$$\begin{aligned} x' &= x - R \operatorname{sen} \gamma \\ y' &= y - (R - R \cos \gamma). \end{aligned}$$

Reemplazando x e y de las ecuaciones 2 i 3:

$$\left. \begin{aligned} x' &= a \operatorname{sen} \frac{R_1 - r_1}{R_1} \alpha - (R_1 - r_1) \operatorname{sen} \alpha - r \operatorname{sen} \gamma \\ y' &= a \cos \frac{R_1 - r_1}{R_1} \alpha - (R_1 - r_1) \cos \alpha + r \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Las coordenadas del punto de contacto inferior G son:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= r_1 \operatorname{sen} \alpha \\ y'' &= r_1 \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

En el sistema en estudio se presenta el inconveniente del *error de excentricidad*, i el de la oscilacion vertical de la parte superior; esta última variacion puede ser de dos signos, positiva para un levante i negativa para un descenso. Su valor será: $\Delta = y - r_1 - h$, i el valor del error de excentricidad: $\epsilon = x'' - x'$

Introduciendo los valores de las ecuaciones 2, 3, 4, se tiene:

$$(6) \quad \Delta = (R - r_1 - h) + a \cos \frac{(R_1 - r_1)}{R_1} \alpha - (R_1 - r_1) \cos \alpha - (R - r) \cos \gamma$$

$$(7) \quad e = R_1 \sin \alpha + r \sin \gamma - a \sin \frac{R_1 - r_1}{R_1} \alpha$$

Para fijar las condiciones de estabilidad estática de estas disposiciones es necesario conocer el desplazamiento máximo de la viga, que producirá la inclinación máxima de la lente. Esta se determina por medio de la ecuación

$$(8) \quad \Delta l = a \sin \frac{R_1 - r_1}{R_1} \alpha' - (R_1 - r_1) \sin \alpha' + (R - r) \sin \gamma$$

la que se resuelve por métodos de aproximación.

Este valor Δl se compone de dos factores:

$$(9) \quad \Delta l = \Delta l_t + \Delta l_q$$

$\Delta l_t = \pm e l_t$. Siendo e el coeficiente de dilatación por el calor, l la luz i t la diferencia de temperatura.

El término Δl_q , debido a la carga, puede fijarse de una manera exacta en los sistemas estáticamente determinados, i en los demás por métodos aproximativos.

Cuando en un sistema enrejado se tiene la cabeza inferior horizontal i directamente apoyada, se puede tomar por Δl_q la suma de los alargamientos de cada una de las barras de la cabeza inferior:

$$(10) \quad \Delta l_q = \sum \frac{S s}{E P}$$

Siendo S la tensión, s la longitud de las barras, P la sección i E el módulo de elasticidad.

$$\text{o con suficiente aproximación:} \quad \Delta l_q = \frac{\sigma l}{E} \quad (11)$$

Con una elección acertada de los radios R , r , R_1 , r_1 , se puede eliminar el error de excentricidad, como también el de la elevación o descenso de la viga, o a lo menos manejarlo dentro de límites prudenciales. En la aceptación de los radios no se tiene entonces más límite que el de las tasas impuestas por unidad de superficie.

Se puede encontrar combinaciones de radios que cumplan las condiciones mencionadas. La condición para que el punto D se mueva en una horizontal se saca de la ecuación 3, haciendo $y = \text{constante}$, o sea: $\frac{dy}{d\alpha} = 0$

Introduciendo en (3) el valor de γ de la ecuación (1) i derivando:

$$\frac{dy}{d\alpha} = -a \frac{R_1 - r_1}{R_1} \sin \frac{R_1 - r_1}{R_1} \alpha + (R_1 - r_1) \sin \alpha + r \frac{R_1 - r_1}{R_1} \sin \frac{(R_1 - r_1) r}{R_1 (R - r)} \alpha = 0$$

Si por otra parte se toma en cuenta que las inclinaciones que se producen por la dilatación son pequeñas, se podrá sustituir con suficiente aproximación el $\sin \alpha$ por el arco α , i multiplicando además por $\frac{R_1^2 (R - r)}{R_1 - r_1}$, se tiene:

$$-a (R_1 - r_1) (R - r) \alpha + R_1^2 [R - r] \alpha + (R_1 - r_1) r^2 \alpha = 0$$

Esta ecuación satisface cualquier valor de α si

$$-a (R - r) (R_1 - r_1) + R_1^2 (R - r) + (R_1 - r_1) r^2 = 0$$

lo que da como condición

$$(12) \quad a = \frac{R_1^2}{R_1 - r_1} + \frac{r^2}{R - r}$$

Si se reemplaza a por su valor, $= h - r + R_1$, la condición toma la forma

$$(13) \quad h = \frac{R r}{R - r} + \frac{R_1 r_1}{R_1 - r_1}$$

Esta condición sirve también para anular el error de excentricidad, es decir, tener en cualquiera posición del puente los dos puntos de contacto del lente, superior e inferior, en una misma vertical.

En efecto, la condición sería: $\varepsilon = 0$.

En la ecuación (7) se debe tener $\frac{\varepsilon}{\alpha} = 0$. Cambiando el seno por el arco e introduciendo el valor de γ , se tiene

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = R_1 + r \frac{R_1 - r_1}{R_1} \cdot \frac{r}{R - r} - a \frac{R_1 - r_1}{R_1} = 0$$

de donde resulta

$$a = \frac{R_1^2}{R_1 - r_1} + \frac{r^2}{R - r}$$

expresión idéntica a la ecuación (12). (Estos valores solo son válidos para un ángulo pequeño de α , en que se puede cambiar el arco por el seno).

Ejemplo. Sea el tramo extremo de un cantiliver de 48.93 m de luz, i que tengamos:

$$R = 0,20 \text{ m}$$

$$r = 0,10 \text{ m}$$

$$R_1 = 0,60 \text{ m}$$

$$r_1 = 0,10 \text{ m}$$

Para cumplir con las ecuaciones (12) i (13):

$$a = 0,72 + 0,10 = 0,82, \dots \dots \dots h = 0,20 + 0,12 = 0,32$$

La deformacion longitudinal para una variacion de temperatura de ± 30 grados i para una sollicitacion de 800 Kg por cm cuadrado en la cabeza inferior es

$$\Delta l = \Delta l_t + \Delta l_q = \pm 0.000012 \times 30 \times 4893 + \frac{800 \times 4893}{2000000} = \pm 1.76 \pm 1.96 \text{ cm}$$

$$\Delta l = \begin{cases} + 3.72 \text{ cm} \\ - 1.76 \text{ cm} \end{cases}$$

El movimiento total alcanza a $3.72 + 1.76 \text{ cm} = 5.48 \text{ cm}$.

Si en el descimbramiento de la viga el apoyo se coloca de tal manera que la mitad de ese movimiento se deslice a la izquierda i la otra mitad a la derecha del eje de simetria del apoyo, el valor a introducir en la ecuacion (8) es:

$$\Delta l = \frac{5.48}{2} = 2.74 \text{ cm.}$$

i con este valor se calculará la máxima inclinacion que alcanzará el lente:

$$2.74 = 82 \sin \frac{5}{6} \alpha' - 50 \sin \alpha' + 10 \sin \frac{5}{6} \alpha'$$

que resuelta dá:

$$\alpha' = 5^\circ 53' 51'' \dots \dots \dots \text{arco } \alpha' = 0.10275$$

Si se introduce este valor de α' en las ecuaciones (6) i (7), se obtiene $\Delta = 0$ i $\varepsilon = 0$, lo que significa que la viga se mueve realmente en una horizontal i que el error de excentricidad se anula.

Puede presentarse el caso que la altura disponible de construccion imponga una altura menor que la fijada por la ecuacion (13), en cuyo caso el error de excentricidad es inevitable.

La siguiente observacion jeneral se puede hacer sobre la influencia del error de excentricidad. (Fig. 13). Esta excentricidad produce en el punto de apoyo un momento $P \varepsilon$, que trata de volver la pieza a su posicion primitiva, produciendo tensiones suplementarias en el enrejado. Si el enrejado tiene cabeza inferior horizontal, se puede fijar aproximadamente las tensiones suplementarias por el valor

$$(14) \quad H = \pm \frac{P \varepsilon}{y' - y''}$$

Para la determinacion de los cuatro radios R, r, R_1 i r_1 , se fijan primero las tasas límites. Esto se puede hacer por las fórmulas de Hertz.

Si p es la presion por unidad de longitud en la arista de contacto, la tension principal de esta arista, referida a unidad de superficie es, segun Hertz:

$$(15) \quad \sigma = \frac{7}{5} \sqrt{\frac{p E}{10 \pi}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = 0.416 \sqrt{p E} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

En estas fórmulas se ha aceptado que la razón entre el alargamiento longitudinal i la contracción transversal es igual a $m = 3,5$.

Para fijar el valor admisible de σ se puede observar lo siguiente: Sean σ_x , σ_y , σ_z , las tensiones principales en un punto considerado, i respecto de cada uno de los ejes x , y , z .

En cuerpos isótropos i para una deformación máxima σ_x en el sentido del eje de las x , los valores σ_x , σ_y , σ_z , están relacionados, dentro de los límites de la ley de Hook, por la expresión:

$$E \delta_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}$$

Si se permiten deformaciones elásticas hasta cerca del límite de la proporcionalidad, $E \delta_x$ es la tensión en este límite de proporcionalidad; i

$$\sigma_x = E \delta_x + \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}$$

podrá tener un valor mayor que $E \delta_x$, sin que por esto se pase el límite de la elasticidad i pueda temerse una deformación permanente. (*)

En los casos presentes, de un rodillo único o lente, en que la sollicitación es tan clara i determinada, las tensiones secundarias carecen de valor i se puede aplicar la tasa máxima.

Kühler da por eso una tasa admisible de 6 000 Kg por cm^2 para el acero fundido, i la práctica ha podido confirmar esto en los apoyos de algunos puentes existentes, que tienen esa alta sollicitación.

Las fórmulas de Hertz, deducidas por vía absolutamente teórica, no han sido suficientemente experimentadas para poder confirmarlas. En 1901 *Stribeck i Schwinnig* han hecho experiencias con esferas de pequeño diámetro; pero no es posible aplicar los resultados obtenidos a las piezas de apoyo, que son de dimensiones relativamente grandes. En el ejemplo citado la presión máxima es de $\sigma_x = 5,14 \text{ t por cm}^2$.

Al colocar las piezas de apoyo, se debe procurar que las desviaciones totales a cada lado sean iguales; para esto es necesario fijar la posición del lente con relación a la temperatura ambiente en el momento de apoyar el puente.

En la ecuación (9) interviene el valor de Δl_q , que corresponde a la dilatación de la viga, producida por la carga.

Esta se compone de dos partes: Peso propio Δl_p , i carga móvil Δl_q .

El peso propio solo interviene una vez al bajar la viga, i no es necesario considerarlo en los movimientos periódicos del apoyo. La deformación total por considerar queda

$$\Delta l = \Delta l_t + \Delta l_p$$

(*) P. ej. Si tenemos tres tensiones principales iguales, el valor σ_x puede alcanzar entre dos i tres veces el valor de $E \delta_x$; para el caso de dos tensiones iguales, podrá alcanzar un valor entre 1,5 i 2 veces el de $E \delta_x$.

i con este valor se determina el ángulo α'' máximo de que se inclinaria el lente: Es necesario repartir este ángulo, a fin de tener una mitad a cada lado para los valores estremos de t , con el objeto de reducir las tensiones secundarias, lo que no deja de ser importante en puentes de luces grandes.

Considerando el ejemplo ya citado, se tiene:

$$\Delta' - \Delta' t + \Delta' l_p = \pm 1.76 + 1.02 \dots \dots \dots \Delta' = \begin{cases} + 2.78 \\ - 1.76 \end{cases}$$

i el desplazamiento total: $2.78 + 1.76 = 4.54$ cm.

El ángulo α'' que corresponde a la mitad de 4.54 cm es:

$$\alpha'' = 4^\circ 53' \dots \dots \dots \text{arco } \alpha'' = 0.085125.$$

Las tensiones secundarias H que se desarrollan en la cabeza inferior del enrejado son de escasa importancia, porque su valor es mui pequeño. Además, jeneralmente no aumentan las tasas máximas absolutas. En el caso de la sobrecarga total i una dilatacion equivalente a $+30$ grados, la tension secundaria es una compresion i disminuye la tasa de trabajo de la cabeza. Una contraccion de -30 grados produce una pequeña tension suplementaria, de ninguna importancia.

CASOS ESPECIALES

1.º Para el caso en que se disponen apoyos con superficies de igual curvatura, $R = R_1$; $r = r_1$; i la condicion del desplazamiento para un pequeño ángulo α es

$$a = \frac{R^2 + r^2}{R - r}; \quad h = \frac{2 R r}{R - r}$$

2.º De cada dos superficies de contacto, una se puede disponer como superficie tanjencial. (Fig. 14). En este caso, $R = R_1 = \infty$

Las coordenadas del punto primitivo de contacto despues de un jiro α del lente son:

$$(16) \quad \begin{cases} x = r \alpha + (h - r + r_1) \text{ sen } \alpha - r_1 \alpha \cos \alpha \\ y = r + (h - r + r_1) \cos \alpha + r_1 \alpha \text{ sen } \alpha \end{cases}$$

i las del nuevo punto de contacto:

$$(17) \quad \begin{cases} x' = (h - r + r_1) \text{ sen } \alpha - r_1 \alpha \cos \alpha \\ y' = y \end{cases}$$

Las ecuaciones (5) son tambien aplicables para este caso.

Para la oscilacion vertical Δ i para el error de excentricidad, se tiene:

$$(18) \quad \begin{aligned} \Delta &= r. \alpha. \text{ sen } \alpha - (h - r - r_1) (1 - \cos \alpha) \\ \epsilon &= r. \alpha \cos \alpha - (h - r) \text{ sen } \alpha \end{aligned}$$

En las figuras 15 i 16 se han dado los detalles de un apoyo de un puente sobre la Zalzach (Austria) i en las figuras 17 i 18 los detalles de los aparatos de un puente de 20 m de luz.

En estos ejemplos se ha evitado un casual deslizamiento oblicuo de las partes del apoyo lenticular, por medio de dientes de engranajes. Es necesario fijar la forma del diente en cada caso.

Finalmente, se pueden ejecutar apoyos con partes esféricas o combinar convenientemente esta clase de apoyos, para tener movimientos en todos sentidos, siempre que las tasas fijadas por las fórmulas de Hertz queden debajo del límite de elasticidad.